零と無限の取扱説明書

著：sou16　2011 年 9 月 29 日分科会にて

１．異端の０と∞

Ａ．無限とは

ヒルベルトの無限ホテル

- *無限個の部屋を有するホテルがある。*
- *それぞれの部屋は１人ずつしか泊まれない。*
- *現在、ホテルは無限人の客が泊まっており、満室である。*

このホテルは「満室」にも関わらず、**更に多くの客を泊めることが出来る。**

ケース１：新たに１人の客がやってきた場合

１番目の部屋にいる客には２番目の部屋に、
２番目の部屋にいる客には３番目の部屋に、
同様に、n 番目の部屋にいる客には n+1 番目の部屋に移ってもらう。
すると１番目の部屋が空き、新たに来た客が泊まることが出来る。

ケース２：無限人の団体客がやってきた場合

１番目の部屋にいる客には２番目の部屋に、
２番目の部屋にいる客には４番目の部屋に、
同様に、n 番目の部屋にいる客には 2n 番目の部屋に移ってもらう。
すると奇数番目の部屋が空き、新たに来た客が全員泊まることが出来る。

ケース３：無限人の団体客が無限グループやってきた場合

ケース２と同じようにして奇数番目の部屋を空ける。
その後、１番目の団体の客を $3, 9, 27, \cdots, 3^n, \cdots$ 番目の部屋に、
２番目の団体の客を $5, 25, 125, \cdots, 5^n, \cdots$ 番目の部屋に、
同様に n 番目の団体の客を $p, p^2, p^3, \cdots, p^n, \cdots$ 番目（p は n+1 番目の素数）の部屋に
案内すると、新たに来た客が全員泊まることが出来る。
（尚、このやり方だと 15, 21, 35, …番目など、無限に多くの空室が出来る。）

それぞれを数式化すると、

ケース１…$\infty + 1 = \infty$

ケース２…$\infty + \infty = \infty$

ケース３…$\infty \times \infty = \infty$　　$(\infty \times \infty + \infty = \infty)$

となり、∞は明らかに普通の「数」ではないことが分かる。

→**∞は「数」ではなく「概念」**

B．嫌われる０

1=2 の証明？

$b = a$とする。

$b = a$

両辺にaを足すと、

$a + b = 2a$

両辺から$2b$を引くと、

$a - b = 2a - 2b$

$a - b = 2(a - b)$

両辺を$(a - b)$で割ると、

$1 = 2$

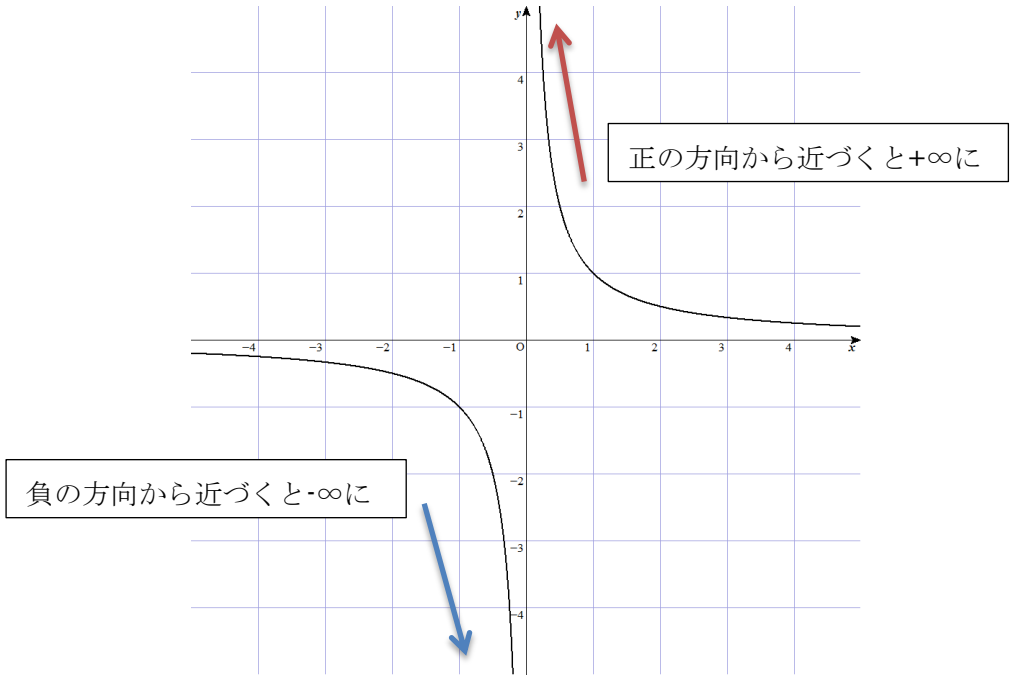
実は…

$b = a$であるので、$a - b = 0$。

よって、ここで 0 で割る計算（0 除算）を行っている。

→0 除算を認めると、とんでもない結果が生まれる

$1 \div 0 = \infty$ということにすれば良いのでは？とも考えられるが…



→**0 除算は定義出来ない！**

C．∞や 0 除算の対処法

基本的には∞や 0 除算が出てきた時点でその式はおじゃんになるが、
それらがいくつか出てくると上手い具合に打ち消し合って
意味のある計算になることがある。$\infty-\infty, \infty\div\infty, 0\times\infty, 0\div 0$などなど。
このような形を「**不定形**」という。

…とは言っても、やはりそのままでは計算出来ない。
そこで、

1．一旦 0 や∞を文字に置き換え、
2．あたかも普通の数であるかのようにして計算し、
3．良さ気な頃合いになったら文字を 0 や∞に戻す

（正確には、0 や∞に「**限りなく近付ける**」という操作を行う。）

というような計算を行うと、「意味のある値」を出すことが出来る。
この「意味のある値」のことを「**極限値**」と言う。
なお、限りなく近付けるという操作をlim（リミット）という記号で表し、
例えば、xを∞に限りなく近付ける時は

$$\lim_{x\to\infty} x$$

という風に書く。（あくまで代入ではなく「近付ける」なので、$x=\infty$ではなく$x\to\infty$）

例：$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{\infty}$$

$$=0$$

ここで重要なのが、いくつかある置き換えた文字が「一定のペースを保って」
0 や∞に近付いていくということ。
このペースというのが非常に重要で、それによって極限値は幾らでも変わってしまう。
上の例だと「分母が分子の 2 乗」というペースを保っているから極限値が 0 になる。
分子をxではなくyに置き換えた

$$\lim_{x\to\infty,y\to\infty}\frac{y}{x^2}$$

の場合、分子と分母はお互いを気にせず好き勝手なペースで∞に近付けるので
極限値は存在しない。

D．ε－δ論法

極限値というのは、∞や0を代入した値ではないし、

関数が実際にその値をとることは無い。

「変数が∞や0に近付いていった時に、その関数が限りなく近付く値」というのが高校での定義だが、これでは余りに曖昧過ぎるということでその辺りをきちんと定義するために「**ε－δ論法**」という論法が使われる。

例えば、「xがaに限りなく近付く時$f(x)$がbに収束する」、というのをこれで書くと、

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \quad s.t. \quad \forall x \in R, 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

となる。

…と言っても、このままではさっぱり分からないので、日本語に翻訳してみよう。

「∀」というのはAll（全ての、任意の）の頭文字Aを逆さにしたもの、

「∃」というのはExist（存在する）の頭文字Eを逆にしたもの、

「R」はReal Number（実数）の頭文字R、

「$s.t.$」はsuch that（そのような）の略。

纏めると、

0より大きい任意のεに対して適当なδが存在して、
$0 < |x - a| < \delta$を満たす全てのxに於いて$|f(x) - b| < \varepsilon$が成り立つ。

となる。

…正直これでは日本語なのかそうじゃないのか分からないような文なので

話し言葉に直してみよう。

どんなに0に近いεを持ってきても、良い感じのδがあって
xとaの差をδより小さくすれば、$f(x)$とbの差がεよりも小さくなる。

実はεだとかδという文字は「小さい数」を表す時に決まって使われるだけで大した意味は無い。更にざっくばらんに言えば、

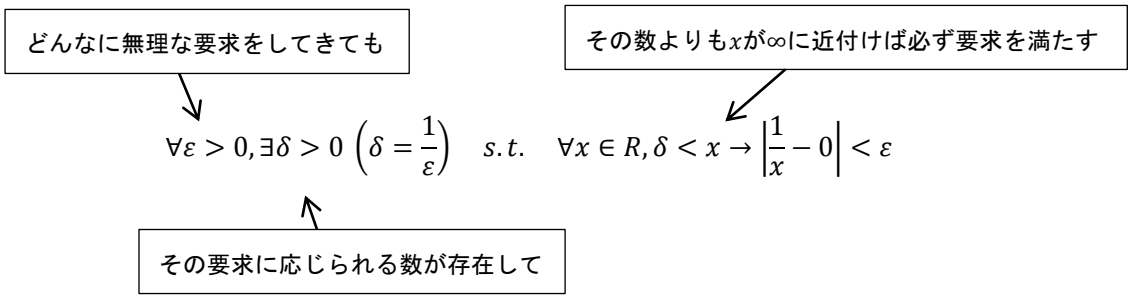
xをそこそこaに近付ければ$f(x)$を幾らでもbに近付けられるよ。

ということ。

「だったらなんでわざわざεとかδとか難しそうな文字使うんだよ！かっこつけかよ！」
と思うかも知れないが、これはつまり疑い深い人が「εよりも誤差を小さく出来るの？」
と言っても、「δよりもxをaに近付ければ良いよ。」と論破出来る…みたいなものである。
一般化した話だと実感が分かり難いので$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$を例に見てみよう。

（｀д´）＜xを∞に近付けると$1/x$が0になるって本当か？
　　それだったら当然0.1よりも小さく出来るんだよな？
（・∀・）＜xを10よりも大きくすりゃなるだろ。
（｀д´）＜…だったら0.01ならどうだ！
（・∀・）＜楽勝ｗｗ xを100よりも大きくしろよ。
（｀Д´）＜な、ならウルトラスーパーデラックス0に近いεならどうだ！
（・∀・）＜もう諦めろよｗｗ xを$1/\varepsilon$よりも大きくすりゃ良いんだよｗｗ
（｀皿´）＜ぐぬぬ…

大分端折ったが、大体こんな感じ。
例の堅苦しい数式でこのやり取りを書くと、



となる。
ちょっとは親しみを持って頂けただろうか？
ちなみに、$0<|x-a|<\delta$（xとaの差をδよりも小さくする）の部分が$\delta<x$（xをδよりも大きくする）になっているが、これはxが近付いていく先が∞だからである。

では、実際にこのε－δ論法で極限を計算してみよう。

例：$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x}$

まず、ε－δ論法無しで普通に高校のやり方で行くと、

$$\lim_{n\to 0}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0}(x+1)$$
$$=0+1$$
$$=1$$

となる。この関数が本当に1に収束するなら、任意の正の数εに対して、

$$0<|x-0|<\delta\rightarrow\left|\frac{x^2+x}{x}-1\right|<\varepsilon$$

を満たすδが存在するはずである。右の式をxについて解くと、

・$x>0$（右極限）の場合

$$\frac{x^2+x}{x}-1<\varepsilon$$
$$\frac{x^2+x}{x}<\varepsilon+1$$
$$x^2+x<(\varepsilon+1)x\quad(\because x>0)$$
$$x^2-\varepsilon x<0$$
$$x(x-\varepsilon)<0$$
$$0<x<\varepsilon$$

これより、 $0<x<\delta=\varepsilon\rightarrow\frac{x^2+x}{x}-1<\varepsilon$が成り立つ。

・$x<0$（左極限）の場合

$$1-\frac{x^2+x}{x}<\varepsilon$$
$$\frac{x^2+x}{x}>1-\varepsilon$$
$$x^2+x<(1-\varepsilon)x\quad(\because x<0)$$
$$x^2+\varepsilon x<0$$
$$x(x+\varepsilon)<0$$
$$-\varepsilon<x<0$$

これより、 $\delta=-\varepsilon<x<0\rightarrow 1-\frac{x^2+x}{x}<\varepsilon$が成り立つ。

よって、任意の正の数εに対して$0<|x-0|<\delta=\varepsilon\rightarrow\left|\frac{x^2+x}{x}-1\right|<\varepsilon$が成り立つ。

２．無限に続く計算

Ａ．無限等比級数

ゼノンのパラドックス

> *アキレスとカメが徒競走をする。アキレスは秒速 10m で走ることが出来、カメは秒速 1m でしか走れない。その為、ハンデとしてアキレスはカメの 10m 後方からスタートする。*
> *アキレスは開始 1 秒でカメのスタート地点に到達するが、その時にはカメは 1m 先に進んでいる。アキレスがその地点に達するまでには 0.1 秒かかり、その間にカメは 0.1m 先に進んでいる。更にアキレスがその地点に達するまでに 0.01 秒かかり、その間にカメは 0.01m 進み…となり、カメが元いた位置にアキレスが到達するまでにカメはほんの少しだけ前に進んでいるので、アキレスはカメに追いつくことが出来ない。*

誰がどう考えても明らかなようにアキレスはあっという間にカメに追いつく。
例えば、スタートしてからの時間を t (秒) とおけば、アキレスが進んだ距離は 10t (m)、カメが進んだ距離は t (m) と表されるので、

$$10t - 10 = t \ \rightarrow \ t = \frac{10}{9}$$

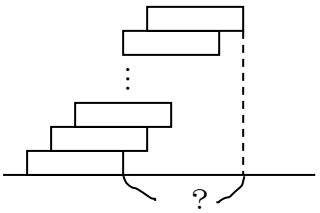
より、アキレスは 1 秒ちょっとでカメに追いつくことが分かる。
（ゼノンの時代にはこういう関数的な考え方は無かったらしい。）

ゼノンの考え方を数学的に表してみよう。
アキレスがカメの元いた位置に達するまでに、カメはアキレスの走った距離の 10 分の 1 だけ前に進んでいる。
その 10 分の 1 の距離を走るのに先程の 10 分の 1 の時間がかかり、その間にカメは更に 10 分の 1 だけ前に進み…となるので、「アキレスがカメの元いた位置に達するまでの時間」はまず 1 秒、次は 10 分の 1、その 10 分の 1、更に 10 分の 1 となっていくので、アキレスがカメに追いつくまでの時間は$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots$(秒)となる。
「無限に正の数を足すんだから、当然答は∞になるに決まってる」というのがゼノンの言い分だが、先程の計算からも明らかなようにこの計算の答は$\frac{10}{9}$になる。
（勘の良い人は気付くかも知れないが、$1 + 0.1 + 0.01 + \cdots = 1.111\cdots$となる。）
無限に正の数を足すとしても足す数がどんどん小さくなっていけば収束することがあるのだ。ちなみに、この様な隣接する項が一定の比を保っている無限に続く足し算のことを「**無限等比級数**」という。

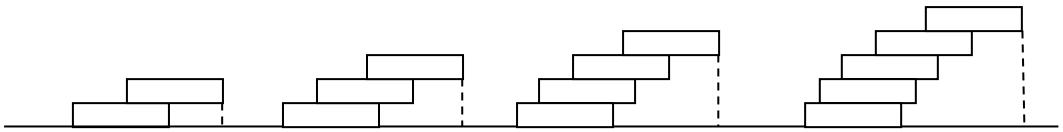
B．調和級数

但し、足す数がどんどん小さくなっていくからといって、必ず収束するとは限らない。
もの凄くゆっくりと∞に発散することもあるのだ。

長さ 2m の直方体の積み木がある。
この積み木を横にずらしながら積み上げるとき、
どのくらいまでなら崩すことなく横にずらせるか？
但し、積み木は完全な直方体とする。



「崩れない」というのは、どの積み木の塊の重心もその塊の下の積み木の面の上にある、ということである。2 個の場合は上の積み木の重心が下の積み木の上にあれば良いので、最大で積み木の長さの半分、1m までずらせる。
3 個の場合、これの上にはもう積めないので下に入れることになる。先ほどの 2 個の積み木の重心は下の積み木の右端から$\frac{1}{2}$m 左のところにあるので、最大で$\frac{1}{2}$m までずらして入れることが出来、合計で$1+\frac{1}{2}$m ずらせる。
同様にして、n 個の場合は最大で$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}$m ずらせる。



これより、無限に積み木を積めば、$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$m ずらせることが分かる。これは一体どれくらいだろうか？計算してみると、

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=\infty$$

より、この級数は∞に発散することが分かる。
なんと、積み木は幾らでも横にずらして積み上げることが出来るのだ。
但し、この級数の発散は非常に緩やかなので、10m 横にずらすだけでも 2 万個以上積み木を積み上げる必要があるが…
この自然数の逆数を足していった級数は「**調和級数**」という。
このように、足していく数自体は 0 に収束しても、その和は発散することもある。
（無限級数が発散するか収束するかを見極める条件としてコーシーの条件やダランベ

ールの条件といったものがある。）

C．置換計算

無限等比級数のように無限に同じような形の項が続くときは、全体を文字に置き換えて計算出来ることがある。

例１：$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots$

$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots=S$と置き換えると、

$$S=1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\cdots$$

$$-)\ \frac{1}{10}S=\quad\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\cdots$$

$$\frac{9}{10}S=1$$

$$S=\frac{10}{9}$$

というように、先程のゼノンのパラドックスを解くことが出来る。

同様にして、$1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots=S$と置き換えると、

$$S=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}+\cdots$$

$$-)\ \frac{1}{x}S=\quad\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}+\cdots$$

$$\frac{x-1}{x}S=1$$

$$S=\frac{x}{x-1}$$

この$1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots=\frac{x}{x-1}$という公式（$1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}$と書くことが多い。）は**非常に重要な公式**なのでしっかり覚えて欲しい。

但し、いつでも置換計算が有効かというとそうでもない。

例２：$1-1+1-1+1-1+\cdots$

$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$と考えれば 0、$1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+\cdots$と考えれば 1 になる不思議な級数だが、$1-1+1-1+\cdots=S$と置き換えると、

$$S=1-1+1-1+1-1+\cdots$$
$$S=1-(1-1+1-1+1-\cdots)$$
$$S=1-S$$
$$S=\frac{1}{2}$$

となり、整数である 1 を足したり引いたりしているのに答が分数になってしまった。

これは$1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}$に$x=-1$を代入しても出る。

このように、普通に考えると明らかにおかしい答が出てきてしまうこともある。
勿論、高校の試験や大学入試でこんなことを書いたら即間違いだ。
しかし、この計算が全く意味の無いものかといえばそうとも限らない。
高校の数学を越えた先にはこういう計算が非常に重要な意味を持つことがあるのだ。

D．解析接続

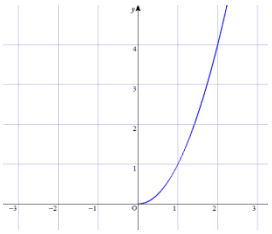
本来$1+x+x^2+x^3+\cdots$は$-1<x<1$でしか収束しない。
ところが、置換計算で出てきた$\frac{1}{1-x}$は$x\neq 1$でさえあればどんな値だろうが計算出来る。
この両者は$-1<x<1$の範囲では完全に一致するが、定義域が全く違う。このように、元の関数の性質を保ちながら定義域を拡大することを「**解析接続**」という。
しかし、この解析接続、実は色んな繋ぎ方があるんじゃないか？と不安がよぎる。
だが、そんな心配は無用。「一致の定理」というものがあるのだ。

一致の定理

関数$f(x)$と$g(x)$が無限個の点を含む領域D_0で常に$f(x)=g(x)$である場合、
その領域D_0を含むより広い領域Dにおいても常に$f(x)=g(x)$となる。

つまり、元の定義域で元の関数に完全に一致するような解析接続の仕方は、**あるとするならただ１つしかない**、ということだ。（ちなみに、あるかどうかは分からない。）
また、領域を拡大しても関数は一致したままであるので、当然ながら解析接続した関数は**元の関数の性質を全て受け継いでいる**。逆に言えば元の関数の性質を利用して解析接続を行うことも出来るのだ。

例：$f(x)=x^2\quad(0\leq x)$



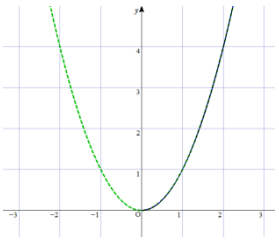
グラフは右のようになる。
まず、この関数は領域$0\leq x$において、

$$f(x-1)=x^2-2x+1$$
$$=f(x)-2x+1$$

という性質を持っている。一致の定理より、解析接続した関数もこの性質を満たす。
$x=0$を代入すると、

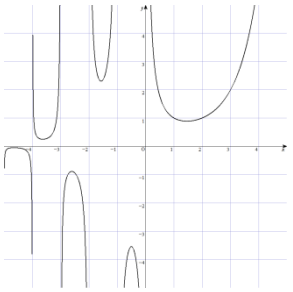
$$f(-1)=f(0)-2\cdot 0+1$$
$$=1$$

より、$f(-1)=1$。同様にして、$f(-x)=f(x)=x^2$が分かる。
これによって関数の定義域は$0\leq x$から実数全体に拡張された。
（グラフは右図）



解析接続で有名なのがオイラーのガンマ関数とリーマンのゼータ関数だ。
折角なので見てみよう。

α．オイラーのガンマ関数



$f(n)=n!$の定義域を複素数にまで拡大したもの。
具体的にはこんな形をしている。

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

ぱっと見ただけでは分からないが、

$$\begin{aligned}\Gamma(1)&=\int_0^\infty e^{-t}dt\\&=[-e^{-t}]_0^\infty\\&=(-e^{-\infty})-(-e^{-0})\\&=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1)&=\int_0^\infty t^x e^{-t}dt\\&=\int_0^\infty t^x(-e^{-t})'dt\\&=[-t^x e^{-t}]_0^\infty-\int_0^\infty-(t^x)'e^{-t}dt\\&=x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt\\&=x\Gamma(x)\end{aligned}$$

より、x が整数の時$\Gamma(x+1)=x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdots3\cdot2\cdot1=$z!が成り立つ。
（正確にはこのガンマ関数$\Gamma(x)$が階乗$n!$を解析接続したものであるというためにはちょっとした条件を加える必要がある。詳しく知りたい人は「ボーア・モレルップの定理」でググってみよう。）
誰しも 1 回は考えたであろう自然数でない数の階乗もこれで考えることが出来る。
ちなみに、最も有名な$\frac{1}{2}$の階乗はこんな感じになる。
この驚くべき結果に戦慄にも似た感動を覚えずにはいられまい。

$$\left(\frac{1}{2}\right)!=\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

β．リーマンのゼータ関数

フェルマーの最終定理と並び、一度は耳にしたことがあるであろう現代数学きっての難問「リーマン予想」。フェルマーの最終定理のように中学生でも意味が分かるほどではないが、言っていることは実は非常に単純明快だ。

一言で言えば、

> 1 を除く複素数全体で定義されたリーマンのゼータ関数$\zeta(x)$がある。
> $\zeta(x)=0$の解は$x=-2,-4,-6\cdots$以外、全て実部が$\frac{1}{2}$の複素数である。

となる。「一言で言えば」と言ったが、全部言ってもこれだけである。

ここで出てくるリーマンのゼータ関数というのが如何にも難しそうだが、実は

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$
$$=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\cdots$$

この関数の定義域を$s=1$以外の複素数全体にまで拡張したのがリーマンのゼータ関数なのだ。つまり、リーマン予想というのは

> 方程式$\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\cdots=0$の解は
> 負の偶数$-2,-4,-6\cdots$と実部が$\frac{1}{2}$である複素数（$\frac{1}{2}+ti$）である。

ということを言っているのだ。

「で？そうだったとして何なの？」という声が聞こえてきそうだが、実はこの予想、解決されれば素数の性質が一気に解き明かされる、という非常に重大な意味を含んでいる。どうしてかというのは色々と深い訳があるが、

$$\prod_{p=\text{全ての素数}}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^s}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5^s}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{7^s}}\cdots$$
$$=\left(1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^{2s}}+\frac{1}{2^{3s}}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{3^{2s}}+\frac{1}{3^{3s}}+\cdots\right)\cdots$$
$$=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\cdots$$

となるところから、何となく関係がありそうだなーというのを感じて頂きたい。

では実際にこのゼータ関数の値を計算してみよう。

例：$\zeta(-1) = 1+2+3+4+5+\cdots$

常識的に考えれば自然数を無限に足していけば答は当然∞に発散する。

だが、ゼータ関数は解析接続で定義域が広がっているのでこんな無茶な計算でも意味のある答を導き出すことが出来る。

$1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}$の両辺を 2 乗すると、

$$(1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x+x^2+x^3+\cdots)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$1+(x+x)+(x^2+x\cdot x+x^2)+\cdots=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots=\frac{1}{(1-x)^2}$$

これに$x=-1$を代入すると、

$$1-2+3-4+5-\cdots=\frac{1}{4}$$

ここで、$1+2+3+4+5+\cdots=S$と置き換えると、

$$\begin{aligned}1-2+3-4+5-\cdots&=(1+2+3+4+5+\cdots)-2(2+4+6+\cdots)\\&=(1+2+3+\cdots)-4(1+2+3+\cdots)\\&=S-4S\\&=-3S\end{aligned}$$

以上より、

$$-3S=\frac{1}{4}$$

$$S=-\frac{1}{12}$$

$$(\zeta(-1)=)1+2+3+4+5+\cdots=-\frac{1}{12}$$

自然数を無限に足していった和が負の数、しかも分数になろうとは誰が思っただろうか。こういう計算は数学だけの単なる机上のお遊びのようにも思えるが、実は現実世界とも深く関わっている。例えば、「カシミール効果」という力の大きさの計算では$1^3+2^3+3^3+\cdots=\zeta(-3)=\frac{1}{120}$という式が実際に使われている。

物理学では、このような本来は∞が出てきて発散してしまうような式を上手いこと計算して意味のある値を導き出す計算のことを「**繰り込み**」という。

３．無限の種類

無限の「濃さ」

無限に広がっている平面がある。
この平面には碁盤のように格子縞が書かれており、
線が交差する点には非常に細い棒が立てられている。
この平面上のある点から非常に細いレーザーを発射するとき、
このレーザーが全く棒に当たることなく無限の彼方まで飛ぶ確率はいくらか？

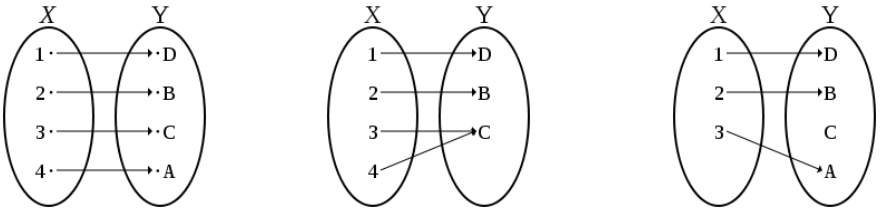
x-y 平面で考えてみよう。レーザーの発射点は原点とし、レーザーが格子点（x 座標、y 座標ともに整数であるような点。）を通ると棒にぶつかるものとする。
レーザーの傾きが2 や $-\frac{7}{3}$のように有理数p/qで表せる場合、レーザーは(q,p)で棒にぶつかる。逆に、レーザーの傾きが$\sqrt{2}$や$-\pi$のように無理数の場合、レーザーは決して棒にぶつからない。
詰まるところ、この問題は

有理数と無理数どちらがどれだけ多いのか？

ということを訊いているのである。
有理数も無理数も無限に存在するに決まっているが、どちらも一緒くたにして同じ無限と考えて良いのか？無限にも大小があったりはしないのか？
なお、無限の場合は「大小」という概念とは一線を画しているので、普通「濃度」という言葉を使う。無限集合にどれだけ「濃く」要素が詰まっているか、という感じだ。

そんなことを初めて考えたのが現代数学の父と呼ばれるカントールだ。
無限の濃度を比べるといっても、極限計算で出てくるような∞ではない。「無限集合の要素の数」に濃度を考えたのだ。無限集合というのは「整数全て」とか「5 の倍数全て」といったように、無限個要素がある集合のことだ。しかし、無限には変わりはない。数えるどころかまともな計算すら出来ない無限同士を一体どのようにして比べるのか？

そこで無限集合同士の大小を比べる際に使われるのが「**全単射**」という考えだ。
全単射というのは「ある集合の要素とその集合の要素を全てもれなく 1 対 1 に対応させることが出来るような集合」のことだ。簡単に言えば、「それぞれの集合から 1 つずつ取り出してペアを作るとき、余るやつがいないような相手の集合」ということ。
例えば、男子 5 人の集合に対して女子 5 人の集合は全単射だ。
女子 4 人の集合は男子が余るので全単射ではない。（**全射**という。）
女子 6 人の集合は女子が余るのでやはり全単射ではない。（**単射**という。）



全単射　　全射　　単射

このように集合同士が全単射である場合は、有限集合ならば要素の数はぴったり等しくなる。だったら、無限集合でも全単射で対応されられるのならその無限同士は等しいと言っても良いんじゃないか？ということを考えたのだ。
どのようにして全単射で対応させられるかどうかを調べるのか？例を見てみよう。

例１：自然数と 2 の倍数

自然数の集合を$\boldsymbol{N}=\{1,2,3,4,\cdots\}$、2 の倍数の集合を$\boldsymbol{D}=\{2,4,6,8,\cdots\}$とおく。
当然ながら$\boldsymbol{N}\supset\boldsymbol{D}$かつ$\boldsymbol{D}\not\supset\boldsymbol{N}$であるから$\boldsymbol{D}$は$\boldsymbol{N}$の真部分集合である。
普通に考えれば真部分集合の要素の数は元の集合の要素の数よりも小さいのが当然だが、それは有限集合での話。無限集合となれば話は別だ。
写像$f:\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{D}(x\mapsto 2x)$を考えると、

$\boldsymbol{N}$	1	2	3	4	5	6	…	n	…
$\boldsymbol{D}$	2	4	6	8	10	12	…	$2n$	…

というように、$\boldsymbol{N}$の要素nに対して$2n$という$\boldsymbol{D}$の要素を一対一に対応させることが出来る。どちらの集合にも余っている要素は 1 つたりとも存在しないので、この 2 つの集合は全単射の関係にある。
よって、この自然数の集合と 2 の倍数の集合の濃度は等しい。

例２：自然数と整数

自然数の集合を$\boldsymbol{N}=\{1,2,3,4,\cdots\}$、整数の集合を$\boldsymbol{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$とおく。

写像$f:\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{Z}\begin{pmatrix}x\mapsto\frac{x-1}{2} & (x\text{が奇数の時})\\ x\mapsto-\frac{x}{2} & (x\text{が偶数の時})\end{pmatrix}$を考えると、

$\boldsymbol{N}$	1	2	3	4	5	$\cdots$	$2n$	$2n+1$	$\cdots$
$\boldsymbol{Z}$	0	-1	1	-2	2	$\cdots$	$-n$	n	$\cdots$

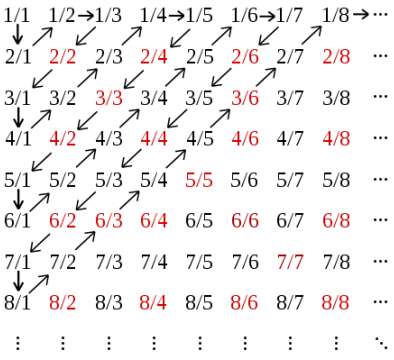
というように、$\boldsymbol{N}$の要素に対して$\boldsymbol{Z}$の要素を一対一に対応させることが出来る。

この２つの例のように、自然数の集合の無限に等しい無限を「**可算無限**」という。
番号を付けて数えることが出来る無限、ということだ。
では、冒頭の問に答える為に有理数の集合と無理数の集合を考えてみよう。

まず有理数の集合だが、右図のように番号を付けて数えることが出来る。具体的には、$\frac{a}{b}$という有理数には

$$\begin{cases}T_{a+b-1}-a+1\ (a+b\text{が奇数の時})\\ T_{a+b-1}-b+1\ (a+b\text{が偶数の時})\end{cases}$$

という番号を付けることが出来る。
なお、T_{a+b-1}というのは$a+b-1$番目の三角数、
$\frac{(a+b)(a+b-1)}{2}$のことである。



例えば、$\frac{2}{7}$なら、$\frac{(2+7)(2+7-1)}{2}-2+1=35$番目となる。よって、

有理数の集合の濃度は可算無限である。

次に無理数の集合だ。
ここで、仮に 0〜1 までの無理数全てに番号を付けて数えることが出来たとしよう。
すると、こんなリストが作れるということになる。

1	0.028220701…
2	0.726463989…
3	0.250181657…
4	0.339574146…
5	0.019264953…
6	0.048617651…
7	0.617005122…
⋮	⋮

果たしてこのリストは本当に 0〜1 まで全ての無理数を網羅出来ているのだろうか？
そこで、1 番目の数の小数第 1 位の数 0 を 1 にし、2 番目の数の小数第 2 位の数 2 を 3 にし、3 番目の数の小数第 3 位の数 0 を 1 にし…というように n 番目の数の小数第 n 位の数を変えた数を考えてみよう。

1	0.028220701…
2	0.726463989…
3	0.250181657…
4	0.339574146…
5	0.019264953…
6	0.048617651…
7	0.617005122…
⋮	⋮
?	0.131678283…

このようにして作った数はリストの何処にも載っていない。n 番目の数とは小数第 n 位が食い違うからだ。このような数え漏れは幾らでも存在する。よって、無理数の集合は可算無限よりも濃度が高い。

このような証明の仕方を「**カントールの対角線論法**」といい、無理数（実数）の集合の濃度を「数えられないほど多い」ということで「**非可算無限**」という。
（ちなみに、可算無限の濃度を$\aleph_0$（アレフ・ヌル）、非可算無限の濃度を$\aleph$（アレフ）と表す。）

これより、無理数の集合は有理数の集合よりも文字通り「無限に」濃い、ということが分かった。
という訳で、冒頭の問の答は「レーザーは殆ど確実に無限の彼方に飛び去る（レーザーが全く棒に当たることなく無限の彼方まで飛ぶ確率は殆ど 1)」だ。

無限にも大小があるのである。
ちなみに、「自然数の無限と実数の無限の間に他の無限は存在するのか？」という問題は「連続体仮説」として知られ、**正しいとも、間違っているとも証明できない**（どちらにしても全く矛盾が生じない）ということが証明されている。つまり、「証明できないことが証明されている」のだ。何だか狐につままれたような感じだが、これは数学の限界を示す一例であると言える。
先程出てきたカントールの対角線論法によって、次の定理が証明されている。

第 1 不完全性定理
数学の公理系で完全に矛盾が無ければ、正しいとも間違っているとも証明できない命題が無限に存在する。

皮肉なことに、数学は自分で、自分自身が不完全であることを証明してしまったのだ。
（ちなみに、第 2 不完全性定理は「数学の公理系で完全に矛盾が無ければ、数学は自分に矛盾がないことを証明できない」というもの。）

という訳で、駆け足で零と無限について見てきたが如何だっただろうか？
若干零成分が少な目になってしまった感はあるが…
少しでも現代数学の面白さというものを知ってもらえたのなら幸甚である。
このように、現代数学は最早現実世界を記述するためのもの、という扱いを越え、非常に抽象的、概念的な世界へと飛翔しているのである。
だが、だからと言って現実世界との関わりがさっぱり切れてしまった訳ではない。むしろ、現実世界の深いところとより密接に関係し合うようになっているのだ。

そんな無限に広がる魅惑の数学世界に、貴方も足を踏み入れてみてはどうだろうか？